

Zsafia Ruttkay

Centrum voor Wiskunde en Informatica

Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam

zsafi@cwi.nl

Interview met Bruno Ernst

Een man met zes

Hans de Rijk is gepensioneerd wis- en natuurkundeleraar. Veel beter bekend is hij onder zijn pseudoniem Bruno Ernst: schrijver van meer dan 200 boeken, oprichter van de jongerentijdschriften Pythagoras en Archimedes, drijvende kracht achter de stichting 'Ars et Mathesis' en nog veel meer. Heden, op 74-jarige leeftijd, is zijn productie nog steeds niet gestopt. Zsafia Ruttkay, oprichtster van de stichting 'Vierkant voor Wiskunde', ondervraagt hem naar zijn drijfveren.

Bruno Ernst is, ook in het buitenland, bekend als de auteur van meerdere boeken over onmogelijke figuren [3] en over Escher [7]. Voor mij, een nieuwkomer in Nederland, was het een aangename verrassing om nog meer boeken door hem te ontdekken, zoals het prachtige *Bomen van Pythagoras* [4], en te beseffen dat de aerdige heer met grijze haren en fonkelende, nieuwsgierige ogen die meerdere toespraken gaf op de Arthesis-dagen, Bruno Ernst zelf was. Zijn identiteit was niet vanzelfsprekend duidelijk doordat zijn bescheidenheid niet in verhouding stond tot zijn grote bekendheid en oeuvre, noch gaf hij zijn toespraak onder de beroemdste van zijn pseudoniemen, maar gewoon als Hans de Rijk.

Zijn andere vijf personages kende ik niet totdat ik mij aansloot bij het bestuur van Stichting Ars & Mathesis, waarvan Bruno Ernst een van de oprichters en drijvende krachten is geweest sinds 1983. Kruiden van de discussies tijdens de bijeenkomsten van het bestuur maakten mij nieuwsgierig naar zijn rol bij Ars & Mathesis, zijn ontdekkingen over werken van Escher en zijn verdere 'verborgen' activiteiten, maar ook over zijn ervaringen als leraar en zijn visie op het lesgeven in en het beoefenen van wiskunde.

Toen bleek dat er tot nu toe geen uitgebreid interview met hem gemaakt is, stemde hij, tot mijn grote vreugde, toe om door mij geïnterviewd te worden. Samen met de wiskundige kunstenaar Rinus Roelofs (ook een lid van het bestuur van Ars et Mathesis) brachten wij twee aangename middagen door in de lichte flat van Hans de Rijk op de zeventiende verdieping met zicht op heel Utrecht. (Hij is een grote liefhebber van zijn stad, en ook over haar oude straatnamen heeft hij een boekje geschreven.) We luisterden naar het levendige verslag van zijn herinneringen, dat verweven was met de ideeën die hem nu bezig houden. Zoals de zes pseudoniemen aangeven, die hij bedacht telkens

als hij in een nieuw vakgebied wilde publiceren, zou men wel meerdere interviews met hem kunnen maken. Wij besloten echter om twee verslagen samen te stellen aan de hand van de gesprekken: dit met Bruno Ernst en een paar van zijn andere verpersoonlijkingen, vooral over wiskunde, en een ander (te lezen in een komend Arthesis nummer) met Bruno Ernst over kunst en zijn kunstverzameling.

Wiskunde als spel

Het is niet echt mogelijk om de twee interesses van Hans de Rijk, wiskunde en kunst, van elkaar te scheiden. Een lezer van *The Magic Mirror of Escher* schrijft op www.amazon.com: "The greatness of this book on the work of M.C. Escher is that it shows how he worked up his ideas for various pieces. It also gives a thorough explanation of his thought and design process." 'Denkproces', 'de geboorte van een idee', 'verklaring' — deze uitdrukkingen keren meerdere malen terug in ons gesprek. Dat is niet verrassend, aangezien ze de leidraad vormen van de lezingen van Bruno Ernst.

Deze ideeën spelen ook een belangrijke rol in een bescheiden ogend en niet al te bekend boekje *Levende wiskunde* [6] dat hij schreef bij het TV-programma 'Kegelsneden' in de Teleac serie 'Levende wiskunde' in 1969. Het onderwerp kan moeilijk modern worden genoemd, en de meeste mensen zouden hierbij alleen maar aan bepaalde formules herinnerd worden. Maar als je die formules zelf zou willen opstellen, wordt het een spannende uitdaging. Bruno Ernst zegt in de inleiding tot de cursus:

"De bedoeling is niet de cursist een afgerond stuk wiskunde voor te schotelen. Aan de hand van deze stof (kegelsneden) willen wij de wiskundige werk- en denkwijze illustreren."

Voor de auteur "*blijft het beoefenen van wiskunde het karakter van een spel behouden.*" Hij citeert het boek *Homo ludens* van Huizinga: "Het spel is een vrijwillige bezigheid, die binnen vastgestelde grenzen van tijd en plaats wordt verricht, naar vrijwillig aanvaardde, doch volstrekt bindende regels, met haar doel in zichzelf, begeleid door een gevoel van spanning en vreugde en door een besef van 'anders zijn' dan het gewone leven."

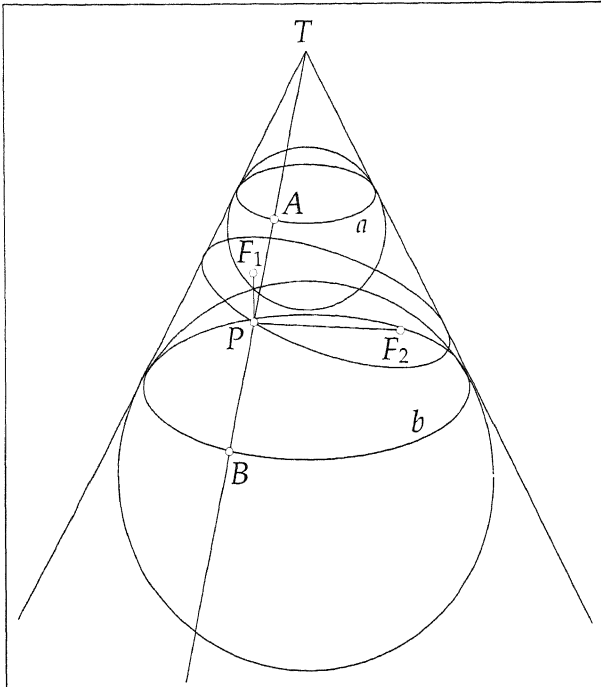
pseudoniemen



Bruno Ernst

Het bewijs van Dandelin

Bezien wij eens de ovale kegelsnede in de figuur. Boven in de kegel is een bol aangebracht die het snijvlak in F_1 raakt en die tegelijkertijd raakt aan de kegelmantel. De raaklijn van de bol met de kegelmantel is een cirkel a . Tegen de onderkant van het snijvlak is eveneens een bol aangebracht, die het snijvlak in F_2 en de kegelmantel volgens de cirkel b raakt.



Beide cirkels zijn evenwijdig: ze liggen op de kegelmantel overal even ver van elkaar. Wij nemen een willekeurig punt P van de snijkromme van de kegelsnede en trekken de lijn TP . De lijn TP snijdt de cirkels a en b in de punten A en B . De lijnen PF_1 en PA zijn raaklijnen vanuit een punt aan de bovenste bol. Ze zijn daarom aan elkaar gelijk: $PF_1 = PA$. Hetzelfde geldt voor PF_2 en PB . Hieruit volgt dat $PF_1 + PF_2 = PA + PB$. Nu is $PA + PB$ juist de afstand op de kegelmantel tussen de beide cirkels a en b . De afstand $PA + PB$ is dus voor elk punt P van de snijkromme gelijk. Dus is de snijkromme volgens de in het voorgaande gegeven definitie een ellips. Dit fraaie en eenvoudige bewijs danken wij aan de Belgische ingenieur Dandelin.

Uit: *Levende wiskunde*.

Het boekje van meer dan 70 bladzijden geeft de lezer de ervaring van een spannende ontdekking van de wereld van de kegelsneden. Het werpt licht op de intrigerende connecties tussen de kegelsneden onderling en met bekende vraagstukken zoals 'het brengen van water langs de kortste weg uit de rivier naar de koe', en op toepassingen in het dagelijkse leven zoals verrekijkers of de vorm van een groot plein in Stockholm. Hoe traditioneel het onderwerp ook mag zijn, men komt een echte verrassing tegen: een elegant en verrassend eenvoudig bewijs voor een verband tussen twee definities van de ellips — een verzameling van punten met een constante som van de afstand tot twee andere punten, en de snijlijn van een bepaald soort vlak en een kegel. Dit bewijs door de Belgische ingenieur Dandelin maakt Ernst zelfs na

dertig jaar nog opgewekt: "Zoiets moois heb je nog nooit gezien — eenvoudig en schoonheid."

Door de vraag of het onderwerp van kegelsneden ook vóór het ontstaan van het boek bijzonder was geweest voor Bruno Ernst moet hij lachen: "Nee, helemaal niet! In feite heb ik het boek in één nacht geschreven. Het programma moest eerder dan gepland worden uitgezonden, en mijn inlevertermijn kwam ook dichterbij. En omdat ik erop had gerekend dat ik nog een week had om het boek te schrijven, was ik er nog helemaal niet aan begonnen. Ik wist natuurlijk, waarover ik moest gaan schrijven, omdat wij het onderwerp van het programma zorgvuldig met Van der Blij hadden voorbereid. Maar ik moest alle opgaven en oplossingen bedenken, en alles nog opschrijven. Ik weet niet, hoe het mij lukte, maar het lukte. Nu zou ik het niet meer kunnen herhalen."

— Hoe komt het dat u juist naar zo'n schitterend bewijs zocht, terwijl er veel meer in omloop waren? Was u de geschiedenis van de stelling aan het achterhalen?

"Nee, tenminste niet op een systematische manier. Maar als iets me interesseerde, dan ging ik me daarin verdiepen. Ik kon me altijd heel snel in nieuwe zaken inwerken tot waar mijn vermogens gingen en tot waar de wereld het wist. En dat kwam gewoon doordat ik altijd al een vrij sterke hekel had aan iets wat anderen al wisten of hadden uitgezocht om daarmee zelf bezig te zijn."

"Zoeken moet je leren," zegt de docent.

Als Bruno Ernst een lezing houdt over wiskunde, raakt het publiek in enkele minuten in zijn ban. Hij lijkt inderdaad op een tovenaer of op een wetenschapper die iets voor de allereerste keer aan het onderzoeken is. Hij doet graag praktische demonstraties en experimenten voor: wat er gebeurt bijvoorbeeld als je een ring van Möbius in tweeën knipt, of als je de uiteinden van het papier niet één, maar twee keer omdraait. Het publiek weet nooit zeker, of hij het antwoord kent, vooral doordat hij het trekken van conclusies vaak aan hen overlaat. Maar dit is geen toeval: volgens Bruno Ernst is het de essentie van wiskundig onderzoek om constant nieuwsgierig rond te kijken, zaken uit te proberen... en van het onderzoeken zelf te genieten.

"Wiskunde bedrijven is rustig gaan zitten, naar buiten kijken en dat probleem zonder enige angst op je af laten komen. Maar dat gaat allemaal mis op het kennisoverdrachtsniveau, want je hebt daar een boek, en dat is aanbevolen, dat moet je doornemen — ze snappen er niets van — en je houdt er wel het gevoel van over: ik ben dom, want ik snap dat niet. En dat is zo jammer, want je wordt steeds op je oplossingsvermogen getest en binnen een bepaalde tijd. Maar dat je inderdaad met het bemediteren van wiskunde bezig bent, dat is erg belangrijk. Bij wiskundigen van professie, die echt wat vinden, gebeurt dat ook zo. Ik ga gewoon fanatiek zoeken en niet denken van: ik ben dom, of: ik moet morgen klaar zijn. [...]"

Ik vind het ook al een kwaal van ons wiskundeonderwijs dat leerlingen op de middelbare school en de universiteit opgepadeld worden met iets, waar ze gauw doorheen moeten... Dit is helemaal geen wiskunde bedrijven. De hele studie, de hele opleiding is daar niet op gericht. Dat vind ik jammer, en dat is voor mij, denk ik, ook de reden waarom er een soort bèta-afkeer is."

— Een leraar kan zijn studenten als het ware recepten aanleren om bepaalde soorten problemen op te lossen. Maar hoe kan hij ze leren om succesvol over een wiskundig probleem na te denken?

“Kijk, je moet niet elke moeilijkheid uit de wegruimen, want zoeken moet je ook leren: je moet meemaken dat als je die kant op gaat, je weg doodloopt. Je moet niet iemand hebben, die meteen erbij staat en zegt: nee, nee, dat gaat niet, doe toch maar niet. Maar het eindeloos laten zoeken, dat geeft het idee van: ik ben te dom voor die studie(richting).”

Bruno Ernst spreekt aan de hand van zijn eigen ervaring — hij gaf vanaf zijn negentiende jaar tot zijn zestigste zelf les, vooral natuurkunde, in Oudenbosch, Roozendaal, Rotterdam, Amersfoort en Utrecht.

“Mijn opleiding was fragmentarisch. Ik wilde als broeder in een orde treden, waar men onderwijs gaf... Eerst ging ik naar een MAVO of MULO waar de stof die we kregen, heel beperkt was. Ik was helemaal niet zo goed in wiskunde. Mijn basis was dus eigenlijk veel te smal. Later werd ik onderwijzer, en ik moest Lagere Akte wiskunde doen (om mijn achterstand in te halen) via zelfstudie bij een leraar in de stad, waar ik eens in de week heen ging. Maar uiteindelijk was ik helemaal op mijzelf aangewezen. De wiskunde was zo bekrompen en zo miezerig... Planimetrie mocht alleen over driehoeken gaan.”

Hij vertelt met genoegen dat hij nooit een graad of diploma heeft gehaald van een pedagogisch instituut, waardoor hij bevoegd zou zijn als middelbare-schoolleraar. In een uitzonderlijke procedure heeft het ministerie van onderwijs, na inspectie van zijn lessen en evaluatie van zijn activiteiten, hem bevoegd verklaard.

“En er kwam ook nooit in die aktestudies naar voren, waaróm een bepaald stuk wiskunde enige relevantie bezat. Ik wist, waarvoor men de determinanten en matrices gebruikte, en wat hun oorsprong was, terwijl ik in de techniek helemaal niet thuis was. Maar als ik dat dan vroeg aan iemand zelfs met middelbare wiskunde, konden ze mij de definities en bewijzen uitleggen — dat waren dan vijf hoofdstukken van het schoolboek. Maar als je ze dan vroeg: ‘Waarvoor doe je dat?’, wisten ze het niet. Zonder dat je weet, wat doe je ermee, wat doe je eraan, hoe breng je het verder en wat zijn de uitlopers, vind ik, moet je er niet eens aan beginnen, want zo zijn ze ook niet gevonden...”

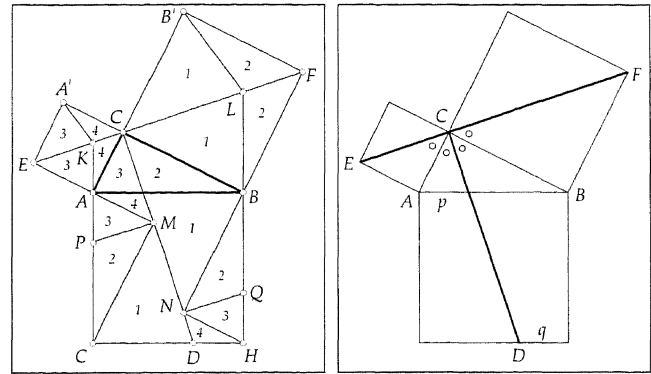
— Hoe was dan een wiskundeles bij Bruno Ernst?

“Ik moest natuurlijk ook een programma doorwerken, maar ik gaf nooit hetzelfde. Er waren leraren bij, die zeiden: 13 april, en je kwam de klas binnen, dan had je de film af kunnen draaien van 13 april jaren terug, want dan waren ze ook op die bladzijde. Nou dat was met mij helemaaaaal niet zo, want eigenlijk als ik naar school ging, of dagen ervoor, keek ik; waar moeten we het over hebben, wat moet ik ze duidelijk maken? En dan ging ik zo wat fantaseren van: daar kun je van uitgaan, soms op hele andere manieren. Zo was het ook heel frappant, dat merkte ik veel later pas, toen ik gewoon op de MULO heel eenvoudige wiskunde gaf, dat de oplossingen die de leerlingen gaven, zo gevarieerd waren. Terwijl als je in een andere klas de wiskundeles binnenkwam, dan kwamen ze altijd met dezelfde oplossing, want die hadden ze geleerd, maar bij mij kennelijk door een andere kijk te geven op het geheel waren ze wat verder gekomen in zoeken en denken.”

Samen met enkele collega's heeft hij in 1960 het wiskundetijdschrift voor jongeren Pythagoras opgericht, en heeft hij voor de tweemaandelijksse nummers vele interessante artikelen geschreven [8]. Het succes was groot: spoedig waren er bijna 30.000 abonnees. Dit aantal ging niet omlaag toen hij een ander tijdschrift, Archimedes, begon.

Waarom juist deze hulplijnen?

De groep bewijzen voor de stelling van Pythagoras waarbij de vierkanten op de rechthoekszijde in een aantal driehoeken wordt verdeeld die samen gelijk zijn aan driehoeken waarin het vierkant op de schuine zijde is verdeeld... zijn vrijwel allemaal saai. Ik heb er een uitgekozen — het bewijs van Epstein uit 1906 — dat bij nader inzien opmerkelijk is. Bovendien geeft het de gelegenheid om te tonen dat zo'n bewijs aanleiding kan zijn om geduldig te zoeken naar eigenschappen van een figuur die telkens van gedaante verandert bij het trekken van een nieuwe hulplijn. Dat is niet saai en laat zien dat de bedenker van het bewijs er lange tijd en met plezier aan gepuzzeld heeft.



Het uiteindelijke bewijs is in de linker figuur af te lezen. Niet interessant genoeg. Maar zoek eens naar het waarom van juist deze hulplijnen? Het is eenvoudig aan te tonen dat EF door C gaat. Het bijzondere van dit bewijs is de deellijn CD van de rechte hoek. De lijnen EF en CD staan loodrecht op elkaar, want C is omringd door een krans van hoeken van 45° . Dit is op zich al een bijzonderheid van deze configuratie. Bij verdere overpeinzing ontdekken we nog een opmerkelijke eigenschap van deze deellijn (zie de rechter figuur): ze verdeelt het grootste vierkant in twee gelijke delen. Om dit aan te tonen hoeven we alleen te bewijzen dat $p = q$. Hoe? Probeer er zelf achter te komen. Wacht anders op de door Bruno Ernst uit te brengen collectie van de mooiste bewijzen van de stelling van Pythagoras.

De stelling van Pythagoras

De karakteristieke eigenschappen van de latere Bruno Ernst waren al in Hans de Rijk aanwezig toen hij naar school ging. Hij begon tamelijk laat met schrijven, omdat hij de gebruikelijke opstellen op school niet interessant genoeg vond. Maar een leraar op de opleiding voor onderwijzer pakte het anders aan. Hij gaf bijvoorbeeld als opgave een spel uit te leggen aan een denkbeeldige bezoeker van Mars. Hierin vond hij een uitdaging: om regels te formuleren, mogelijke situaties en strategieën uit te leggen, en anderen te leren genieten van het spel. Met gemak schreef hij bladzijden vol hierover, en werd snel bekend vanwege zijn heldere stijl.

Met wiskunde verliep het ook zo. Op de Mulo raakte hij zeer teleurgesteld toen hij erachter kwam, dat de gebruikelijke oefeningen met sommen niet alleen al lang opgelost, maar ook heel eenvoudig waren en iedereen ze kon maken. Waarom zou hij ze dan ook moeten maken?

“Ik begon mij pas meer voor de meetkunde en de wiskunde te interesseren, toen ik op school met de stelling van Pythagoras kennis maakte,

want dat vond ik toch wel heel wonderbaarlijk. En die houding heb ik altijd nog. Ik ga nooit zitten puzzelen aan opgaven waarvan ik weet: ze zijn al opgelost! Die dingen die nog niet gevonden zijn, daar wil ik nog best mijn tijd aan besteden.”

En met Pythagoras gebeurt dat nog steeds. De stelling is bewezen maar hoeveel verschillende bewijzen bestaan er? Nu is Bruno Ernst bezig een boek samen te stellen met de mooiste. Hij is niet alleen een selectie aan het maken uit de talloze bestaande bewijzen, maar hij levert ook nieuwe eigen bewijzen erbij, en kijkt scherp en kritisch of een ‘lelijk’ bewijs vereenvoudigd kan worden, zodat het eleganter en begrijpelijker wordt. Hij haalt even een paar van zijn eigen aantekeningen van zijn studeerkamer, en gaat onmiddellijk vol enthousiasme vertellen wat hij gevonden heeft: het bekende, ogenschijnlijk ingewikkelde bewijs van Epstein is op slechts een paar eenvoudige waarnemingen gebouwd, en het kan veel korter uitgevoerd worden. In deze vorm is het bewijs nu een kandidaat voor zijn selectie van de interessantste.

De natuur

Maar zijn grootste liefde is — moeilijk te geloven — natuurkunde. Het begon met een misverstand toen hij 8 was. Hij raakte in de ban van een boek ‘over de natuur’ van één van zijn klasgenoten — “met allemaal beesten erin, panters, leeuwen en zo”, dus hij wilde zelf ook thuis graag zo’n natuurkundeboek hebben. En zijn vader heeft er één van de plank gepakt: het *Handboek der Natuurkunde* uit 1865.

“En het gekke is, het ging mij om die tijgers en die leeuwen, die vond ik spannend, en ik had hier de eerste bladzijden gelezen: (hij leest voor van het oude boek, dat nu ook op tafel ligt) ‘als er op een plaats iets is, kan er op diezelfde plaats niet iets anders zijn.’ Dat raakte een snaar bij mij, want dit vond ik meteen verschrikkelijk spannend. Ik vond die een beetje axiomatische beginselen van de natuurkunde zo interessant! Kennelijk zat er iets al in mij, want anders kan je nooit in plaats van die leeuwen je met zoiets saais inlaten!”

Al op zijn negende schreef hij zijn eerste ‘boek’ (vier blaadjes uit een schrift), getiteld *Het maken van gassen*. Met de bewondering van een schooljongen vertelt Hans de Rijk, hoe hij in de vierde klas van zijn onderwijzer hoorde dat als je waterstof met zuurstof verbrandde, er water ontstond.

Zonnewijzers en handschriften

Bruno Ernst is een der oprichters van de Zonnewijzer Kring. Een vereniging die nu circa 200 leden telt. Hij schreef over deze materie twee boeken [5, 9] en een groot aantal artikelen in het Bulletin van de zonnewijzerkring. Ook daar lagen zijn interesses bij het nog steeds onbekende. Zijn belangrijkste ontdekking was een wiskundig orderingsprincipe van alle bestaande en nog niet ontdekte zonnewijzers en zonnekompassen. Daarmee ontdekte hij enige nieuwe zonnewijzerfamilies.

Het bestaande bewijs dat de zonnewijzer van Regiomontanus goed werkte stemde hem niet tevreden. Deze zonnewijzer werd gepubliceerd in 1474, maar uit die tijd bestaat er geen verklaring van het mechanis-

me, alleen een soort handleiding ervoor. Later werd met behulp van het zware geschut van trigonometrie bewezen dat het goed werkte. Maar hiermee nam Bruno Ernst geen genoegen:

“Ik wilde een soort ideeënarcheologie ontwikkelen. Hoe kon Regiomontanus hierop gekomen zijn met de wiskunde die toen gebruikelijk was?”

Hij zocht dus een bewijs zonder trigonometrische formules, maar met behulp van de veel meer beperkte wiskunde die toegankelijk was voor Regiomontanus. Toen hij dat vond, bleek het veel korter en eenvoudiger te zijn, dan vroegere bewijzen.

“Daar heb ik zes jaar naar gezocht, tot ik een bewijs vond dat in de trant van Regiomontanus zou kunnen liggen. Daar heb ik graag jaren voor over gehad.”

Hans de Rijk heeft niet alleen naar de wiskunde van zonnewijzers gekeken, maar ook naar de wiskunde van handschriften.

“Op het gebied van handschrift heb ik een systeem ontworpen om de verschillende bewegingen zo ver uit te splitsen, dat ik met tien teken-tjes, door die gewoon achter elkaar te benoemen, een heel handschrift kan reconstrueren. Ik heb het nooit gepubliceerd, maar dat is wel de systematiek die vanuit handschriften in een soort wiskundige bewerking af te lezen is. En dat is best wel leuk, dat je dus met bepaalde streepjes en puntjes gewoon kunt zeggen, of het een m is of andere letter.”

Hij beoefent ook kalligrafie, waarvan uniek versierde brieven en enveloppen het bewijs zijn. Zijn interesse in handschrift reikte verder dan de wiskundige aspecten ervan. Onder weer een andere pseudoniem, Ben Engelhart publiceerde hij werken over grafologie en schrift [1, 2]. Als Ben Elshout schreef hij over fotografie en film. Alles bij elkaar heeft hij meer dan 250 werken gepubliceerd. Deze bestrijken een breed spectrum aan onderwerpen. De oplagen variëren van een enkele getypt exemplaar van een natuurkundige werk als materiaal voor zijn lesprogramma op school, tot boeken die in meer dan een dozijn talen vertaald zijn.

Hij vindt de uiterlijke vorm van een boek bijzonder fascinerend en drukt daar graag zijn persoonlijke stempel op. Hij heeft miniatuur boeken uitgegeven en is een praktizerend boekbinder. Ook op dit terrein zoekt hij weer uitdagingen: hoe klein kan een boek gemaakt worden? Zijn resultaat: een boekje van ongeveer één centimeter hoog!

Derhalve is hij niet alleen een denker en boekenwurm, maar zeker ook een ambachtsman. Naast boekbinden op professioneel niveau (te oordelen naar de resultaten), is hij ook een geslaagd pottenbakker, juwelier en steenhouwer. Tot zijn spijt is hij de kunst van het glasblazen niet machtig geworden. En een nog onvervulde droomwens is een viool te bouwen.

Verantwoording

Dit interview is ook gepubliceerd in *Euclides* nr. 1, jaargang 2000/2001.

Referenties

- | | | |
|---|--|---|
| 1 B. Engelhart, <i>Calligrafie</i> , Wolters-Noordhoff, Groningen, MCMLXVI. | 4 Bruno Ernst, <i>Bomen van Pythagoras</i> , Aramith, Amsterdam, 1985. | 7 Bruno Ernst, <i>De toverspiegel van M.C. Escher</i> , Tachen, Keulen, 1994. |
| 2 B. Engelhart, J. W. Klein, <i>50 Eeuwen schrift</i> , Aramith, Amsterdam, 1988. | 5 Bruno Ernst, <i>25 eeuwen tijdmeting</i> , Aramith, Amsterdam, 1988. | 8 <i>Pythagoras-festival</i> , Wolters-Noordhoff, 1970. |
| 3 Bruno Ernst, <i>Avonturen met onmogelijke figuren</i> , Aramith, Amsterdam, 1985. | 6 Bruno Ernst, <i>Levende wiskunde</i> , Teleac, Delft, 1969. | 9 Bruno Ernst, <i>De zon als klok</i> , 1983. |